ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1991

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

I

n et k désignent des entiers naturels.
On définit la suite $B_n(x)$ des polynômes définis par les conditions :

$$(*)\quad \begin{cases} B_0(x) = 1 \\ \dfrac{dB_n}{dx}(x) = n\,B_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$$(**)\quad B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = (n+1)\,x^n \text{ pour } n \geq 1\ .$$

On appelle nombre de Bernouilli d'ordre n le nombre b_n défini pour $n \geq 0$ par

$$b_n = B_n(0).$$

1. Calculer les $B_n(x)$ pour $n \leq 3$.

2. Montrer que $B_1(0) = -B_1(1)$ et que pour $n \neq 2$, on a la relation :
$$B_n(1) = B_n(0).$$

3. Montrer par récurrence sur n qu'on a :

a. $B_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, b_p\, x^{n-p}$ pour $n \geq 0$.

b. $\sum_{p=0}^{n-1} C_n^p\, b_p = 0$ pour $n \geq 2$.

4. On définit $P_n(x) = B_n(x) - (-1)^n B_n(-x) + n\,x^{n-1}$ pour $n \geq 0$.

a. Prouver que $\dfrac{dP_n}{dx}(x) = n\,P_{n-1}(x)$.

b. Etablir que $P_n(x) = B_n(x+1) - (-1)^n B_n(-x)$.

c. Pour n impair prouver que $\int_0^1 P_n(-t)dt$ est nulle.

d. Prouver que $P_n(x) = 0$.

5. a. Déduire de la question précédente que pour tout $k \geq 1$

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = b_{2k+1} = 0.$$

b. Prouver que la fonction $x \longrightarrow B_n(x + \frac{1}{2})$ est paire ou impaire avec n.

En déduire que $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

c. Montrer que pour tout $n \geq 0$, les polynômes

$$Q_n(x) = B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) + B_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} B_n(2x)$$

ont même parité que n et que $\dfrac{d}{dx} Q_{n+1}(x) = (n+1)\,Q_n(x)$.

d. Prouver que $Q_0 = 0$ et que pour tout $k \geq 0$, $Q_{2k} = 0 \Rightarrow Q_{2k+1} = 0$.

Toujours sous l'hypothèse $Q_{2k} = 0$, établir que $Q_{2k+2} = 0$.
(On considérera Q_{2k+3}).

En conclure que $B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{2k-1}} - 1\right) b_{2k}$.

Tournez la page S.V.P.

6. a. Montrer que $B_2(0) > 0$ et que $B_2(x)$ n'a qu'une racine simple sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b. Montrer que si $B_{2k}(x)$ n'a qu'une racine sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et si $B_{2k}(0) > 0$, alors $B_{2k+1}(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c. Sous les mêmes hypothèses qu'en b, prouver que $B_{2k+2}(x)$ n'a qu'une racine sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que $B_{2k+2}(0) < 0$.

d. Toujours sous les hypothèses de b, établir que $B_{2k+3}(x) \leq 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que $B_{2k+4}(x)$ n'a qu'une racine sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ avec $B_{2k+4}(0) > 0$.

e. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \geq 1$, b_{2k} est du signe de $(-1)^{k+1}$.

7. a. Prouver que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ et que, pour tout $k \geq 1$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k}(t)\,dt = 0 .$$

b. Utiliser 5.d. pour montrer que, quel que soit $k \geq 1$,

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+1}(t)\,dt \right| \leq \left| \frac{b_{2k+2}}{k+1} \right| \text{ et que } \sup_{0 \leq x \leq 1} |B_{2k+2}(x)| = |b_{2k+2}| .$$

II

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$; on suppose $g(x) \geq 0$ pour tout x dans [a,b]. Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx .$$

2. On suppose maintenant qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $\forall\, x \in [a,d]$ $g(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ pour tout x dans [d,b]. On suppose de plus

$$\int_a^d g(x)\,dx = -\int_d^b g(x)\,dx .$$

Montrer que si f est décroissante sur [a,b] on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \Big(f(a) - f(b)\Big) \int_a^d g(x)\,dx .$$

3. A l'aide du I.7. déduire que si f est une fonction continue sur [0,1], alors

$$\left| \int_0^1 f(x)\, B_{2k+2}(x)\,dx \right| \leq \left| b_{2k+2} \right| \int_0^1 |f(x)|\,dx .$$

Déduire de II.2. que si f est continue décroissante sur [0,1], alors

$$\left| \int_0^1 f(x)\, B_{2k+1}(x)\,dx \right| \leq \Big(f(0) - f(1)\Big) \left| \frac{b_{2k+2}}{k+1} \right| .$$

FIN